CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1979. — Option MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

$\mathbb{Z}$ est l'anneau des entiers relatifs.

$\mathbb{R}$ est le corps des réels et $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes.

On note $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des applications *bornées* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et on désigne par N_0 la norme définie sur $\mathcal{B}$ par

$$\forall f \in \mathcal{B} \qquad N_0(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, θ_α désigne l'élément de $\mathcal{B}$ défini par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \theta_\alpha(x) = e^{i\alpha x}.$$

I

1° Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ q réels *distincts*; montrer que la famille

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q) = (\theta_{\alpha_1}, \theta_{\alpha_2}, \ldots, \theta_{\alpha_q})$$

est une famille libre de $\mathcal{B}$.

On note $E(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$ engendré par $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$.

2° Soit $\varphi \in E(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Prouver l'existence de

$$\lim_{X \to \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} e^{-i\beta t} \varphi(t)\, dt.$$

On note $\mu_\beta(\varphi)$ cette limite. Montrer que l'application

$$\varphi \longmapsto \mu_\beta(\varphi)$$

est une forme linéaire sur $E(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$; et qu'on peut choisir q réels $(\beta_1, \ldots, \beta_q)$ de façon que $(\mu_{\beta_1}, \ldots, \mu_{\beta_q})$ soit la base duale de $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$.

3° Soit A la famille des θ_α lorsque α parcourt $\mathbb{R}$ et E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$ engendré par A.

a. La famille A est-elle une base de E ?

b. Montrer que si φ et ψ appartiennent à E, il en est de même pour les fonctions $\varphi\psi$, $\overline{\varphi}$, $|\varphi|^2$.

c. Montrer que pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, l'application

$$\varphi \longmapsto \mu_\beta(\varphi)$$

définie à la question précédente est une forme linéaire sur E.

Cette forme linéaire est-elle continue pour la norme N_0 ?

La famille $(\mu_\beta)_{\beta \in \mathbb{R}}$ est-elle une famille libre du dual de E ?

d. Pour toute fonction φ appartenant à E, on appelle *spectre* de φ l'ensemble des nombres réels β tels que $\mu_\beta(\varphi) \neq 0$. On le note $Sp(\varphi)$.

Montrer que $Sp(\varphi)$ est un ensemble fini et que

$$\varphi = \sum_{\alpha \in Sp(\varphi)} \mu_\alpha(\varphi)\, \theta_\alpha.$$

4° On considère l'application h de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall \varphi \in E \qquad h(\varphi) = \mu_0(|\varphi|^2).$$

Montrer que h est une forme hermitienne sur E.

Cette forme hermitienne est-elle définie positive ?

.../...

II

On désigne par F l'adhérence de E dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}, N_0)$.

1° Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$. Montrer que si f et g appartiennent à F, il en est de même pour les fonctions fg, $\bar{f}$, $|f|^2$.

Montrer que toute fonction appartenant à F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2° Soit $\{\alpha_p\}$ une suite injective de nombres réels et Σu_p une série à termes complexes *absolument convergente*. Montrer que la fonction f définie par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \qquad f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p e^{i\alpha_p x}$$

est un élément de F.

3° Soit a réel tel que $0 < a < 1$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \qquad f_a(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a^p}{p} \cos px\,.$$

Montrer que l'on définit ainsi une fonction f_a appartenant à F.

Montrer que f_a est dérivable et que sa dérivée est la somme d'une série. Calculer cette somme et en déduire une expression de $f_a(x)$.

4° Soit $f \in F$ et $\{\varphi_n\}$ une suite de fonctions appartenant à E telle que $f = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ dans $(\mathcal{B}, N_0)$. Soit $\beta \in \mathbb{R}$.

Montrer que la suite des nombres complexes $\mu_\beta(\varphi_n)$ est une suite de Cauchy. En déduire l'existence et l'unicité d'une forme linéaire *continue* $\tilde{\mu}_\beta$ définie sur (F, N_0), telle que

$$\forall \varphi \in E \qquad \tilde{\mu}_\beta(\varphi) = \mu_\beta(\varphi)\,.$$

A-t-on comme dans I

$$\tilde{\mu}_\beta(f) = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} e^{-i\beta t} f(t)\,dt\ ?$$

5° Pour tout $f \in F$, on note $Sp(f)$ l'ensemble des réels β tels que $\mu_\beta(f) \neq 0$. $Sp(f)$ est le spectre de f.

Montrer que si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions appartenant à F telle que

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \text{ dans } (\mathcal{B}, N_0)\,,$$

on a l'inclusion

$$Sp(f) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sp(f_n)\,.$$

Que peut-on en déduire sur le spectre d'un élément de F ?

Quel est le spectre de la fonction f définie au 2° ?

Peut-on affirmer $E \neq F$?

III

Pour tout x réel, on désigne par $\rho(x)$ le réel défini par les deux conditions

$$-\pi < \rho(x) \leqslant \pi\ ; \qquad \frac{1}{2\pi}[x - \rho(x)] \in \mathbb{Z}.$$

1° x et y étant des réels et k un entier relatif, montrer les relations

$$\rho[\rho(x)] = \rho(x)$$
$$\rho(x+y) = \rho[\rho(x) + \rho(y)]$$
$$\rho(kx) = \rho[k\rho(x)]$$
$$|e^{ix} - 1| \leqslant |\rho(x)|\,.$$

2° Soit $\eta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un réel $l \geqslant 1$ tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant les inégalités

$$a \leqslant k \leqslant a + l \quad \text{et} \quad |\rho(k\eta)| \leqslant |\rho(\eta)|\,.$$

3° Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un *entier* $k_0 \geqslant 1$ tel que

$$|\rho(k_0\alpha)| < \varepsilon.$$

On pourra par exemple considérer la suite $\{\rho(n\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$.

En déduire l'existence d'un réel $l = l(\varepsilon\ ;\ \alpha) \geqslant 1$ tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant les inégalités

. . . / . . .

$$a \leqslant k \leqslant a + l \qquad \text{et} \qquad |\rho(k\alpha)| < \varepsilon.$$

4° On se propose de démontrer que pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in \mathbb{R}^q$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $l = l(\varepsilon ; \alpha_1, \ldots, \alpha_q) \geqslant 1$ tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant les $(q + 1)$ inégalités

$$\begin{cases} a \leqslant k \leqslant a + l \\ |\rho(k\alpha_j)| < \varepsilon \qquad j \in [1, q]. \end{cases}$$

La question précédente établit ce résultat pour $q = 1$.

On suppose donc $q \geqslant 2$.

Hypothèse de récurrence : la proposition énoncée est vraie pour $q - 1$.

a. Prouver l'existence de $l(\varepsilon ; \eta_1, \ldots, \eta_q)$ lorsque

$$\forall j \in [1, q] , \qquad |\eta_j| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $\eta_q \neq 0$, on pourra poser

$$\beta_j = 2\pi \frac{\eta_j}{\eta_q} \text{ pour } j \in [1, q - 1]$$

et utiliser l'hypothèse de récurrence pour introduire

$$l\left(\frac{\varepsilon}{2} ; \beta_1, \ldots, \beta_{q-1}\right).$$

b. Lorsque les α_j sont quelconques, montrer en s'inspirant du 3°, qu'il existe un entier $k_0 \geqslant 1$ vérifiant les q inégalités

$$|\rho(k_0 \alpha_j)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad j \in [1, q].$$

Achever la démonstration.

5° Soit $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un réel $l(\varepsilon) \geqslant 1$ tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} a \leqslant k \leqslant a + l(\varepsilon) \\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad |f(x) - f(x + k)| < \varepsilon. \end{cases}$$

Peut-on étendre cette propriété aux fonctions appartenant à F ?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail